بسم الله الرحمن الرحیم

۸۴۸۸۵

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

رساله

برای دریافت درجه دکتری تخصصی ($Ph.D$) در رشته ریاضی محض، گرایش هندسه

عنوان

ژئودزیکهای همگن بر خمینه‌های ریمانی همگن

استاد راهنما

دکتر مگردیچ تومانیان

اساتید مشاور

دکتر ابراهیم پور رضا

دکتر اسدالله رضوی

۱۳۸۵ /۱۲/ ۱۱

پژوهشگر

رضا چاوش خاتمی

شهریورماه ۱۳۸۵

تقدیم به

همسرم

برای تمام مرارتهایی که در طول دوران تحصیلم

خواسته یا ناخواسته، با صبوری تحمل نمود و پشتیبانم بود

پدر و مادر

که هستیم متعلق به آنها است

و

پسرم شایان

تقدیر و تشکر

خداوند متعال را هزاران بار سپاس می‌گویم که در تمامی مراحل زندگی‌ام الطاف بیکران خویش را از این بنده حقیر دریغ نداشته است.

از استاد گران مایه‌ام جناب آقای دکتر تومانیان سپاسگزارم، زیرا از سالها پیش هدایت علمی و تشویقهای ایشان، مشوق من در ادامه تحصیل و راهگشای من در حل مسائلی بوده است که با آنها برخورد داشته‌ام.

از استاد فاضلم جناب آقای دکتر پورضا سپاسگزارم، زیرا علاوه بر مشاورت رساله درسهای بسیاری از ایشان آموخته‌ام.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر رضوی نهایت قدردانی را دارم. هر چند محضر ایشان را از نزدیک درک نکرده‌ام ولی از فضایل ایشان در این رساله بهره‌مند شده‌ام.

همچنین از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی نهایت سپاس را دارم. راهنماییهای ارزنده ایشان کمک شایانی در جهت بهبود این رساله بوده است.

از تمامی اساتیدم در دانشگاه تبریز در دوره کارشناسی و همچنین از اساتید بزرگوارم در دوره کارشناسی ارشد ریاضی در مشهد نهایت سپاس را دارم.

از یکایک مسئولین صدیق و زحمتکش دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تبریز در هر سمت و پستی به لحاظ تمامی زحماتی که مستقیم و یا غیر مستقیم به آنها داده‌ام قدردانم، در پایان از تمامی دوستانم در مراحل تحصیل که لحظاتی خوش و فراموش نشدنی را با یکایک آنها داشته‌ام ممنونم.

اجر کم عندالله

نام خانوادگی دانشجو: **چاوش خاتمی** نام: **رضا**

عنوان پایان نامه:

ژئودزیکهای همگن بر خمینه‌های ریمانی همگن

استاد راهنما:
دکتر مگردیچ تومانیان، استاد گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تبریز

استاد (اساتید) مشاور:
دکتر ابراهیم پور رضا، دانشیار گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تبریز
دکتر اسدالله رضوی، استاد گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیر کبیر

مقطع تحصیلی: **دکتری تخصصی** رشته: **ریاضی محض** گرایش:هندسه
دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی ::شهریور ۸۵ تعداد صفحه: ۶۱

کلید واژه‌ها:
ژئودزیک همگن، بردار همگن ، خمینه همگن ، جبرلی و گروه لی نیم ساده و نیم ساده ضعیف.

چکیده: در این رساله، هدف این است که با در نظر گرفتن ساختار جبری گروه لی G در خمینه ریمانی همگن G/K، وجود و تعداد ژئودزیکهای همگن متعامد گذرنده از $x_0=\{K\}$ مورد مطالعه قرار گیرد. در این راستا پاره ای مسائل مطرح و مورد بررسی قرار میگیرد.

۱) با داشتن شرایط خاص روی G نظیر حل پذیری وضعیت وجود وخواص هندسی ژئودزیک‌های همگن چگونه است ؟

۲)با چه شرایطی می توان برای ژئودزیکها همگن روی $M=G/K$ حد اکثر تعیین نمود؟

۳) شرایط مطرح شده در (۲) در حالتی که G نیم ساده یا نیم ساده ضعیف باشد، برای ژئودزیک‌های همگن حاصل از بردارهای ژئودزیک روی M چگونه است ؟

ادامه چکیده

مخصوصا نتایج زیر را بررسی و اثبات می کنیم.

۱) فرض کنیم $M=\frac{G}{K}$ خمینه‌ای همگن و g' جبرلی، گروه لی همبند G'باشد، B فرم کلینک بر g' و $g'=\underline{s}+\underline{p}$ تجزیه g' نسبت به B باشد. اگر $W_{rad}B=\underline{s}$ آنگاه M حداقل یک ژئودزیک همگن مار بر $\{K\}$ دارد.

۲) فرض کنیم $M=\frac{G}{K}$ خمینه‌ای همگن و g' جبرلی، گروه لی همبند $G'=[G,G]$باشد، B فرم کلینک بر g' و $g'=\underline{s}+\underline{p}$ تجزیه g' نسبت به B باشد، اگر G گروه ه لی نیم ساده ضعیف باشد. آنگاه m ژئودزیک همگن متعامد از مرکز M عبور می‌کند که در آن $m=\dim\underline{s}$.

۳) اگر در خمینه ریمانی همگن $M=\frac{G}{K}$ ، G نیم ساده باشد، آنگاه n ژئودزیک همگن متعامد از مرکز خمینه همگن $M=\frac{G}{K}$ عبور می‌کند که در آن $\dim\frac{G}{K}=n$.

۴) بررسی زیر فضاهایی از $\underline{g}$ (و $\underline{g'}$) که تمام اعضای آنها ژئودزیکهای همگن هستند.

در ادامه با ارائه و اثبات قضیه‌های مربوطه، نوع خاصی از کلاف تاری معرفی می‌گردد که آنرا کلاف تاری همگن خواهیم نامید.

برای کلاف تاری همگن، نوعی کلاف تاری به نام کلاف تاری وابسته، ساخته خواهد شد که خواص مورد نیاز را جهت مطالعه ژئودزیکهای همگن دارا باشد. با ایجاد یک، یکریختی کلافی قوی بین کلاف تاری وابسته و کلاف مماسی خمینه ریمانی همگن، $M=\frac{G}{K}$ وجود و شرایط بردارهای ژئودزیک در فضای تاری بررسی میشود.

فهـــرست

مقدمه و پیشینه تحقیقات

هدف از این مقدمه نگاهی اجمالی است به ساختار، مطالب و اهداف رساله. به طور کلی این رساله دارای سه فصل، فهرست منابع و لغت نامه‌ای است که لغات تخصصی مورد استفاده، در آن جمع آوری شده است.

قبل از بررسی فصلهای رساله و موضوعات مطرح شده در آنها، پیشینه تحقیقات و اهداف رساله را مورد مطالعه قرار میدهیم.

فرض کنیم که G گروه لی همبند و K زیر گروه بسته G باشد. دسته هم مجموعه های چپ K در G را با G/K نشان می دهیم. ساختار دیفرانسیل پذیر یگانه ای بر G/K قابل تعریف است که در این صورت G/K را یک خمینه همگن می‌نامند.

فرض می کنیم $T:G\times M\to M$ یک عمل ترایا از G روی خمینه دیفرانسیل پذیر M و K زیر گروه پایا گر نقطه $x_0\in M$ باشد. بر حسب ساختار دیفرانسیل پذیر، وابرسانی $\varphi: G/K \to M$ با ضابطه $\varphi(gk)=gx_0$ ، نتیجه می دهد که M خمینه همگن دیفرانسیل پذیر است . اگر ∇ یک التصاق آفین بر خمینهٔ $M=G/K$ باشد،فرض می کنیم ∇ تحت عمل طبیعی $T:G\times M\to M$ ناوردا است . در این صورت ژئودزیک $\gamma:I\to M$ را همگن گوئیم اگر زیر گروه یک پارامتری $t\to \exp tX$ $(t\in IR)$ وبرای $X\in T_eG)$ چنان موجود باشد که $t\in I.$

$$\gamma(t)=T(\exp tX,x),\qquad \gamma(\circ)=x,$$

مسئله وجود و چگونگی ژئودزیکهای همگن برخمینه‌های همگن وابستگی نزدیکی به ساختار جبری گروه لی G و نیز ساختار هندسی خمینه $M=\dfrac{G}{K}$ بستگی دارد.

جهت بررسی دقیق‌تر ساختار بردارهای همگن و ژئودزیکهای، برخی فعالیتها و پژوهشها در این زمینه را مرور میکنیم.

اگر $M=\frac{G}{K}$ خمینه‌ای همگن و تحویلی با التصاق آفین تاب آزاد ∇بر M باشد، آنگاه تمام ژئودزیکها بر (M,∇)همگن می‌باشند (مراجع [25] یا [19] جلد دوم صفحات *197- 196* را ملاحظه کنید).

اگر التصاق لوی ـ چویتای $\nabla(Levi-Civita)$ برخمینه همگن Mاز متر ریمان Gناوردا بر Mحاصل شود آنگاه تمام ژئودزیکها، ژئودزیک همگن خواهند بود. (مرجع [17]را ملاحظه کنید).

کووالسکی(*Kowalski*) و زنته (*Szenthe*) در [21] ثابت کردند که هر خمینه همگن حداقل یک ژئودزیک همگن گذرنده بر مبدا دارد.

در [20] و [22] کووالسکی خمینه‌های همگنی را بررسی کرده است که در آنها گروه G حل پذیر می‌باشد.

کاجزر(*Kajzer*) در [12] ثابت کرده است هر گروه لی شبه ریمانی G حداقل یک ژئودزیک همگن دارد که از $e\in G$ عبور می‌کند.

هم چنین می‌توان در منابع [23] و [20] شرایط دیگری را در مورد وجود بردارهای ژئودزیک و ژئودزیکهای همگن ملاحظه نمود.

از جمله این شرایط، بطور طبیعی تحویلی *(nuturally recuctive)* بودن خمینه ریمانی همگن است، در [23] ثابت شده است که "*در هر خمینه ریمانی بطور طبیعی تحویلی، هر ژئودزیک یک ژئودزیک*

همگن است." عکس مطلب مذکور در حالت کلی برقرار نیست، در مرجع [24] مثالهایی از خمینه ریمانی همگن ارائه شده است، که در آنها تمام ژئودزیکهای همگن هستند ولی خمینه ریمانی همگن، بطور طبیعی تحویلی نمی باشد.

در این رساله، هدف این است که با در نظر گرفتن ساختار جبری گروه لی G در خمینه ریمانی همگن G/K، وجود و تعداد ژئودزیکها همگن متعامد گذرنده از $x_0=\{K\}$ مورد مطالعه قرار گیرد.

در این راستا پاره ای مسائل مطرح و مورد بررسی قرار میگیرد.

۱) با داشتن شرایط خاص روی G نظیر حل پذیری وضعیت وجود وخواص هندسی ژئودزیک‌های همگن چگونه است ؟

۲)با چه شرایطی می توان برای ژئودزیکها همگن روی $\mathrm{M}=G/K$ حد اکثر تعیین نمود؟

۳) شرایط مطرح شده در (۲) در حالتی که G نیم ساده یا نیم ساده ضعیف باشد، برای ژئودزیک‌های همگن حاصل از بردارهای ژئودزیک روی M چگونه است ؟

در ادامه بخشهای مختلف رساله و مباحث مطرح شده در آنها را مرورخواهیم نمود .

فصل اول: ساختار خمینه همگن و ژئودزیک همگن

در این فصل به بررسی خمینه همگن و ژئودزیکهای همگن می‌پردازیم، در این راستا نگاهی دقیق به ساختار خمینه‌های همگن خواهیم داشت، به علاوه مفهوم ژئودزیک همگن را بررسی خواهیم کرد. تنظیم این بخش چنان است که نه تنها تعریفها و قضیه های پایه و اساسی مورد نیاز در آن ارائه می-شود، بلکه برخی تحقیقات و فعالیتهای انجام گرفته در راستای رساله نیز مورد بازبینی قرار خواهد گرفت.

فصل دوم: ساختارهای جبری

این فصل به بررسی ساختارهای جبری مورد نیاز جهت اثبات قضیه‌های اساسی بخش بعدی می-پردازد.

مباحث این بخش شامل گروههای پوچ توان و حل پذیر است. به علاوه خواص گروههای لی نیم ساده و جبرهای لی نیم ساده مطالعه خواهد شد.

در ادامه نوعی خاص از گروههای به نام گروههای لی نیم ساده ضعیف تعریف می‌گردد، که همراه آن خواص اساسی و ارتباط این گروهها با جبرهای لی و گروههای نیم ساده و همچنین رادیکال آنها بررسی خواهد گردید.

فصل سوم: نتایج اساسی

در این فصل نتایجی را که در فصلهای اول و دوم در خمینه ریمانی همگن بررسی شده است ، جمع بندی و شرایط، چگونگی، ساختار و نیز تعداد بردارهای ژئودزیک و ژئودزیکهای همگن را روی خمینه‌های همگن مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مخصوصا نتایج زیر را بررسی و اثبات می کنیم.

الف) *ساختار ژئودزیکهای همگن بر خمینه همگن* $M=\dfrac{G}{K}$ *در حالتی که* G *گروه لی نیم ساده است.*

ب) *ساختار ژئودزیکهای همگن برخمینه ریمانی همگن،* $M=\dfrac{G}{K}$ *در حالتی که* G *گروه لی نیم ساده ضعیف است*

ج) *بررسی زیر فضاهایی از* $\underline{g}$ *(و* $\underline{g}'$*) که تمام اعضای آنها ژئودزیکهای همگن هستند.*

در ادامه با ارائه و اثبات قضیه‌های مربوطه، نوع خاصی از کلاف تاری معرفی می‌گردد که آنرا کلاف تاری همگن خواهیم نامید.

برای کلاف تاری همگن، نوعی کلاف تاری به نام کلاف تاری وابسته، ساخته خواهد شد که خواص مورد نیاز را جهت مطالعه ژئودزیکهای همگن دارا باشد. با ایجاد یک، یکریختی کلافی قوی بین کلاف تاری وابسته و کلاف مماسی خمینه ریمانی همگن، $M=\dfrac{G}{K}$ وجود و شرایط بردارهای ژئودزیک در فضای تاری بررسی میشود.

منابع

این قسمت از رساله در برگیرنده تمام منابع و مراجع معرفی شده و مورد استفاده در فصلهای مختلف رساله می‌باشد این منابع براساس ترتیب الفبائی نویسنده مقاله یا کتاب تنظیم شده است.

واژه نامه انگلیسی به فارسی

واژه‌ها و لغات بکار رفته در این رساله در این بخش جمع آوری و بر حسب ترتیب الفبائی تنظیم شده است. واژه‌های مورد استفاده از واژگان مصوب انجمن ریاضی ایران و فرهنگستان زبان و ادب فارسی انتخاب و گردآوری شده است.

فصل اول

ساختار خمینه همگن و ژئودزیک همگن

در این فصل ابتدا به بررسی و مطالعه برخی از ویژگیهای گروههای لی که در ادامه جهت مطالعه ساختار خمینه‌های همگن و نیز ژئودزیکهای همگن مورد استفاده قرار خواهد گرفت می‌پردازیم .

در ادامه به بررسی خمینه‌های ریمانی همگن، ژئودزیکهای همگن و بردارهای ژئودزیک و ویژگیهای اساسی آنها پرداخته میشود.

تعریف ۱ـ۱([2]**).** فرض کنیم G,H گروههایی لی باشند نگاشت $f:G\to H$ را یک **همریختی گروه لی** یا به اختصار **همریختی** گوئیم اگر f یک همریختی گروهی بوده به علاوه نگاشتی دیفرانسیل پذیر از G به H باشد.

همریختی $f:G\to H$ را یکریختی گروه لی یا به اختصار **یکریختی** گوئیم هرگاه f به معنای گروهی یک یکریختی بوده و نیز وابرسانیی از خمینه G به H باشد.

تعریف ۱ــ ۲([2]**).** اگر G یک گروه لی باشد. K را زیر **گروه لی** G گوئیم چنانچه

۱) K یک گروه لی باشد.

۲) نگاشت $\varphi:K\to G$ موجود باشد که φ همریختیی یک به یک باشد.

از تعریف ۱ـ۲، نتیجه می‌شود که دیفرانسیل نگاشت φ یعنی $d\varphi$ از فضای مماسی K به فضای مماسی G یک به یک است.

در این صورت φ خمینه K را در خمینه G می‌نشاند.

فرض کنیم K زیر گروهی از G باشد تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۱ـ۳([2]). اگر G گروهی لی و K از نظر جبری زیر گروه G باشد، توپولوژی روی G یک توپولوژی بر K القاء می‌کند، K را زیر **گروه بسته** G گوئیم چنانچه K زیر مجموعه‌ای بسته از G باشد.

با استفاده از تعریفهای ۱ـ۲ و ۱ـ۳ می‌توان ثابت کرد که هر زیر گروه بسته ازیک گروه لی، خود زیر گروه لی آن گروه است. به عبارت دقیق‌تر:

قضیه ۱ـ٤([1]). *فرض کنیم K زیر گروه بسته گروهی لی G باشد، آنگاه خمینه توپولوژیک K (با توپولوژی القائی از G) ساختار دیفرانسیل منحصر به فردی می‌پذیرد که با آن ساختار K گروه لی می‌شود.*

با این ساختار دیفرانسیل پذیر نگاشت شمول $i:K\to G$ همریختیی از گروههای لی است و بنابه تعریف ۱ـ۲، K زیر گروه لی G خواهد بود، در این حالت K زیر خمینه G است.

تعریف ۱ـ۵([1]). فرض کنیم G یک گروه لی و M خمینه‌ای دیفرانسیل پذیر باشد در این صورت همریختی α از گروه لی G به گروه وابرسانیهای خمینه دیفرانسیل پذیر M را در نظر می‌گیریم، گوئیم G بر X **از سمت چپ عمل** می‌کند اگر نگاشت $T:G\times M\to M$ با ضابطه $T(g,x)=\alpha(g)x$ دیفرانسیل پذیر باشد.

با استفاده از تعریف فوق اگر x نقطه‌ای از خمینه M باشد، زیر گروه پایاگر x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$G_x=\{g\in G;\alpha(g)x=x\}$$